

Analytické metódy v teórii čísel

Dominik Rigasz (dominik.rigasz@trojsten.sk)

1 Analýza

Ak sa postupnosť reálnych čísel $a_1, a_2, \dots$ "blíži" k nejakému reálnemu číslu L , potom povieme, že L je limitou postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^\infty$, značíme $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$. Tomuto pojmu nám stačí rozumieť intuitívne, pre úplnosť však nižšie uvádzame aj definíciu, ktorá dáva presný význam tomu, že postupnosť sa "blíži" k L .

Definícia 1. Povieme, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ má limitu L , ak pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $N \in \mathbb{N}$ také, že pre všetky $n \geq N$ platí $|a_n - L| < \varepsilon$.

Z definície sa dá ukázať, že ak limita existuje, je jednoznačná. Postupnosti, ktoré majú reálnu limitu nazývame konvergentné. Na zjednodušenie zavedieme nejaké zápisy.

Definícia 2. Povieme, že funkcie f a g sú asymptoticky rovné (značíme $f \sim g$), ak platí $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Definícia 3. Pre funkcie f, g povieme, že $f \in O(g)$, ak existuje konštanta C také, že pre všetky dost veľké x platí $f(x) \leq Cg(x)$.

Pre postupnosť $\{a_n\}$ nazveme nekonečný súčet $\sum_{n=1}^\infty a_n$ radou. Ak tento súčet existuje a je konečné číslo, povieme, že ide o konvergentnú radu.

Cvičenie 1. Súčet $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$ je nekonečný. (Danú radu nazývame harmonickou, a hovoríme, že diverguje k nekonečnu.) **Hinty:** 1

Cvičenie 2. Rada $\sum \frac{1}{n^2}$ konverguje. **Hinty:** 2

Veta 1 (Basel problem). Platí $\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

2 V teórii čísel

Analytická teória čísel skúma otázky o prvočíslach a o ich rozložení medzi prirodzenými číslami. Centrálnym objektom je nasledujúca funkcia.

Definícia 4. Pre $x \in \mathbb{R}$ definujeme $\pi(x)$ ako počet prvočísel p , splňajúcich $p \leq x$.

Kvôli náhodnej povahe prvočísel je ťažké dostať sa k nejakým presným vzorcom, a preto najlepšie v čo môžeme dúfať sú odhady, ktoré sú tým presnejšie čím ďalej na číselnej osi sme. Najdôležitejším výsledkom je nasledujúca veta.

Veta 2 (Prvočíselná veta). Platí $\pi(n) \sim \frac{n}{\log n}$.

Jej dôkaz je neelementárny, no relatívne ľahko sa dá dokázať, že existujú konštantny $a, b > 0$ také, že pre všetky n platí $a \frac{n}{\log n} < \pi(n) < b \frac{n}{\log n}$. Prvočíselná veta nám umožňuje urobiť jednoduchý odhad na n -té prvočíslo p_n .

Cvičenie 3. Platí $p_n \sim n \log n$. **Hinty:** 3

Znáмым tvrdením z elementárnej teórie čísel je Bertrandov postulát.

Veta 3 (Bertrandov postulát). *Pre každé $n \geq 2$ existuje prvočíslo medzi n a $2n$.*

Prvočíselná veta nám umožňuje toto tvrdenie zosilniť.

Veta 4 (všeobecný Bertrand). *Nech $\varepsilon > 0$. Pre každé dost veľké n existuje prvočíslo medzi n a $(1 + \varepsilon)n$.*

Ďalšia vec, ktorú analytická teória čísel skúma je to, ako "veľké" sú podmnožiny prirodzených čísel. Vieme, že z hľadiska kardinality je násobkov čísla 2026 rovnako veľa ako štvorcov, avšak intuícia velí, že štvorcov by malo byť v istom zmysle oveľa menej. Túto intuíciu formalizuje asymptotická hustota.

Definícia 5. Nech $A \subset \mathbb{N}$. Potom asymptotická hustota množiny A je hodnota

$$d(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|A \cap \{1, 2, \dots, n\}|}{n},$$

ak táto limita existuje.

Ide o silný nástroj pri úlohach – totižto často ak chceme ukázať, že nejakých dobrých čísel je "veľa", tak nám stačí ukázať, že tých zlých je "málo" (v zmysle asymptotickej hustoty). Asymptotickú hustotu množiny A možno neformálne interpretovať aj takto: Aká je pravdepodobnosť, že náhodné prirodzené číslo je prvkom A ?

Cvičenie 4. Nahliadnite, že asymptotická hustota bezštvorcových čísel je $\frac{6}{\pi^2}$. **Hinty:** 4

Metóda z predošlého cvičenia sa dá zovšeobecniť. Tento vzorec spája násobenie so sčítaním (naľavo známa Riemannova Zeta funkcia).

Veta 5 (Eulerov produkt).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ prvočíslo}} \left(\frac{1}{1 - p^{-s}} \right)$$

Občas, keď máme množinu A , o jej veľkosti nám môže niečo povedať aj rada $\sum_{a \in A} \frac{1}{a}$. Zísť sa môžu nasledovné rady.

Cvičenie 5 (ťažšie). Rada $\sum_p \text{prvočíslo} \frac{1}{p}$ diverguje. **Hinty:** 5

Cvičenie 6. Platí $\sum_p \text{prvočíslo} \frac{1}{p^2} < \frac{1}{2}$. **Hinty:** 6

Častou témou v analytickej teórii čísel je zobrať nejakú náhodnú funkciu, ktorá v sebe kóduje informáciu o prvočíslach, nasčítať ju cez všetky vstupy, a odhadovať sumy. V úlohách je časté pozeráť sa na veľkosť niečoho: Či už je to veľkosť množiny formou asymptotickej hustoty, alebo veľkosť nejakého výrazu, alebo veľkosť rastu nejakej funkcie.

3 Príklady

Cvičenie 7. Prirodzené číslo n nazveme *mocninné*, ak $n = x^k$ pre nejaké prirodzené x, k , kde $k \geq 2$. Nech $a_1, a_2, a_3, \dots$ je rastúca postupnosť, v ktorej sú zoradené všetky mocninné čísla. Dokážte, že pre nekonečne veľa indexov i je $a_{i+1} - a_i$ násobkom čísla 2021. (iKS 10–N6)

Hinty: 7

Cvičenie 8. Pre polynóm f s celočíselnými koeficientmi existuje postupnosť po dvoch rôznych prirodzených číslach $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ spĺňajúca

$$0 = f(a_1), \quad a_1 = f(a_2), \quad a_2 = f(a_3), \quad \dots$$

Aký môže byť stupeň f ? (Turnaj miest 2003) **Hinty:** 8

Cvičenie 9. Sú dané nenulové polynómy f, g s celočíselnými koeficientmi také, že $f(n) \mid g(n)$ pre nekonečne veľa prirodzených n . Nahliadnite, že $g = f \cdot h$ pre nejaký polynóm h s racionálnymi koeficientmi. **Hinty:** 9

Cvičenie 10. Je dané nepárne prvočíslo p . Dokážte, že pre všetky dostatočne veľké prirodzené čísla x má jedno z čísel $x, x+1, x+2, \dots, x+\frac{p-1}{2}, x+\frac{p+1}{2}$ prvočíselného deliteľa väčšieho ako p . (China Southeast 2020) **Hinty:** 10

Cvičenie 11. Prirodzené číslo nazveme *palindrómom*, ak sa nezmení obrátením poradia jeho čífer v desiatkovej sústave. Nájdite všetky polynómy f s celočíselnými koeficientmi také, že $f(n)$ je palindróm pre každé prirodzené n . **Hinty:** 11

Cvičenie 12. Je dané prirodzené číslo k . Dokážte, že existuje N také, že pre všetky $n \geq N$ má $\binom{n}{k}$ aspoň k rôznych prvočíselných deliteľov. (China TST 2010) **Hinty:** 12

Cvičenie 13. Nech f je nekonštantný polynóm s celočíselnými koeficientmi. Potom existuje nekonečne veľa prvočísel, ktoré delia nejaké nenulové $f(n)$ pre $n \in \mathbb{N}$. (Schurova veta) **Hinty:** 13

Cvičenie 14. Uvažujme rastúcu postupnosť prirodzených čísel $\{a_n\}_{n=1}^\infty$. Dokážte, že ak pre nejaké $k > 0$ rad $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{a_n^k}$ diverguje, tak existuje nekonečne veľa prvočísel, ktoré delia nejaké a_n . **Hinty:** 14

Cvičenie 15. Je daná neklesajúca postupnosť prirodzených čísel $\{a_n\}_{n=1}^\infty$, ktorá spĺňa $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/n = 0$. Dokážte, že postupnosť $\{\lfloor n/a_n \rfloor\}_{n=1}^\infty$ obsahuje všetky prirodzené čísla. **Hinty:** 15

Cvičenie 16. Sú dané celé čísla $a, b > 1$. Dokážte, že nejaký násobok a vo svojom zápise v sústave so základom b obsahuje každú z číslic $0, 1, \dots, b-1$ aspoň raz. (upravený Putnam) **Hinty:** 16

Cvičenie 17. Rastúca postupnosť prirodzených čísel $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ spĺňa $a_n < 100n$ pre všetky n . Dokážte, že v nej možno nájsť nekonečne veľa členov, ktorých zápisy v desiatkovej sústave obsahujú 2023 po sebe idúcich jednotiek. **Hinty:** 17

Cvičenie 18. Dokážte, že $\prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right) = 0$. **Hinty:** 18

Cvičenie 19. Dokážte, že $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha}$ konverguje, práve keď $\alpha > 1$. **Hinty:** 19

Cvičenie 20. Sú dané celé čísla a_1, a_2, b_1, b_2 také, že $a_i > 0$ a zároveň $\gcd(a_i, b_i) = 1$. Dokážte, že existuje nekonečne veľa t takých, že $a_1t + b_1$ aj $a_2t + b_2$ sú bezštvorcové čísla. (Irán 2020) **Hinty:** 20

Cvičenie 21. Sú dané prirodzené čísla $a_1, \dots, a_k$. Dokážte, že existuje nekonečne veľa t takých, že $a_it + 1$ sú bezštvorcové čísla pre všetky $i = 1, \dots, k$. **Hinty:** 21

Cvičenie 22. Dokážte, že pre nekonečne veľa prirodzených n je $n^2 + 1$ bezštvorcové číslo. (China TST 2015) **Hinty:** 22

Cvičenie 23. Postupnosť prirodzených čísel $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ nazveme *roztomilou*, ak je rastúca a zároveň spĺňa $a_n < 9000n$. Index i nazveme *hustým*, ak $a_i \mid \text{nsn}(a_1, \dots, a_{i-1})$, a *riedkym*, ak $a_i \nmid \text{nsn}(a_1, \dots, a_{i-1})$. Rozhodnite, či každá roztomilá postupnosť musí mať nekonečne veľa a) hustých indexov, b) riedkych indexov. (EMMO 2016) **Hinty:** 23

Cvičenie 24. Nech $a_1, a_2, \dots$ je rastúca postupnosť, v ktorej sú zoradené všetky bezštvorcové prirodzené čísla. Dokážte, že pre nekonečne veľa indexov i platí $a_{i+1} - a_i = 2020$. (China Southeast 2020) **Hinty:** 24

Cvičenie 25. Dokážte, že existuje nekonečne veľa prirodzených n takých, že číslo $n^2 + 1$ nemá žiadneho deliteľa tvaru $k^2 + 1$ okrem seba samého a jednotky. (Irán 2010) **Hinty:** 25

Cvičenie 26. Pre prirodzené b a x označujeme ako $s_b(x)$ ciferný súčet čísla x zapísaného v sústave so základom b . Dokážte, že pre ľubovoľné dané prirodzené k vieme zvoliť nekonečne veľa prirodzených n spĺňajúcich $s_p(n) > k$ pre všetky prvočísla p . **Hinty:** 26

Cvičenie 27. Sú dané kladné reálne čísla $a_1, \dots, a_k$, z ktorých aspoň jedno nie je celé. Dokážte, že existuje nekonečne veľa prirodzených n takých, že n je nesúdeliteľné s

$$\lfloor a_1 n \rfloor + \dots + \lfloor a_k n \rfloor.$$

Hinty: 27

Cvičenie 28. Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel (a, b) také, že $a^n + b^n$ je $(n+1)$ -tou mocninou prirodzeného čísla pre každé n . **Hinty:** 28

Cvičenie 29. Je daná rastúca postupnosť prirodzených čísel $\{a_n\}_{n=1}^\infty$, ktorá spĺňa $a_n \mid a_1 + \dots + a_{n-1}$ pre všetky prirodzené $n \geq 2001$. Dokážte, že pre všetky dostatočne veľké n platí $a_n = a_1 + \dots + a_{n-1}$. (Turnaj miest 2001) **Hinty:** 29

Cvičenie 30. Je daný kvadratický polynóm f s celočíselnými koeficientmi taký, že $f(n)$ je štvorec pre každé prirodzené n . Nahliadnite, že f je rovné štvorcu nejakého lineárneho polynómu. **Hinty:** 30

Cvičenie 31. Celé čísla a, b spĺňajú, že $a2^n + b$ je štvorec pre každé prirodzené n . Dokážte, že $a = 0$. (Poľsko) **Hinty:** 31

Cvičenie 32. Prirodzené číslo nazvime *jednotkové*, ak je v desiatkovej sústave zapísané samými jednotkami. Nájdite všetky reálne polynómy f také, že pre jednotkové n je $f(n)$ tiež jednotkové. (Putnam 2007) **Hinty:** 32

Cvičenie 33. Nech $b > 5$ je celé číslo a pre každé $n \in \mathbb{N}$ definujeme x_n ako číslo so zápisom

$$\underbrace{1 \dots 1}_{n-1} \underbrace{22 \dots 2}_n 5$$

v sústave so základom b . Dokážte, že x_n je štvorec pre všetky dostatočne veľké n práve vtedy, keď $b = 10$. (ISL 2003) **Hinty:** 33

Cvičenie 34. Je daný monický polynóm f s celočíselnými koeficientmi taký, že $f(x) = 2^n$ má pre každé $n \in \mathbb{N}$ riešenie v prirodzených číslach. Dokážte, že f je lineárny. (iKS 8–N2)

Hinty: 34

Cvičenie 35. Nahliadnite, že pre nekonečne veľa prirodzených čísel n platí $\pi(n) \mid n$. **Hinty:** 35

Cvičenie 36. Je dané kladné reálne číslo ν . Ak $p_1, p_2, \dots$ je rastúca postupnosť všetkých prvočísel, dokážte, že čísla $\lfloor p_n \nu \rfloor$ majú dokopy nekonečne veľa prvočíselných deliteľov. **Hinty:** 36

Hinty

1. Poskupinkuj členy: tretí+štvrtý, piaty+šiesty+...+ôsmy, deviaty+...+šestnásť, ...
2. Porovnaj s radou $\sum \frac{1}{n(n+1)}$.
3. PNT a limity.
4. Aká je pravdepodobnosť, že číslo je deliteľné p^2 ?
5. Nech konverguje. Potom nájdi $k+1$ také, že $\sum_{i=k+1}^{\infty} p_i < 1/2$. Nazveme prvočísla $p_1, \dots, p_k$ malé. Rozdeľ čísla od 1 po N do dvoch skupín podľa toho, či sú deliteľné nejakým veľkým prvočíslom. Koľko najviac čísel je vo veľkej skupine? Koľko najviac ich je v tej malej? (Každé číslo vieme napísať ako $a^2 m$ pre bezštvorcové m .)
6. Prvých pár členov spočítaj, zvyšok odhadni radou $\sum \frac{1}{(2n+1)^2}$.
7. Stačia štvorce. Ostatných mocnín je veľmi málo.
8. Neočakávame skôr, že nám polynómy čísla zväčšujú?
9. Vydeľte so zvyškom $g = fh + r$ s $\deg r < \deg f$. Pozor na technické detaily!
10. Napíšte si ku každému z čísel najväčšiu prvočíselnú mocninu z jeho rozkladu.
11. $f(n+1) - f(n)$ bude asymptoticky oveľa menšie ako $f(n)$, takže niekoľko najvyšších cifier v zápise $f(n)$ sa dlho nezmení – a teda sa aj niekoľko najmenších cifier dlho nezmení.
12. Konštruktívnejšie riešenie: nahliadnite, že ak $k < p^m \mid n - j$, $0 \leq j < k$, potom $p \mid \binom{n}{k}$. Nekonstruktívne riešenie: prvočíselné mocniny v rozklade $\binom{n}{k}$ neprevyšujú n .
13. Vyberte si počiatočný bod a skáčte z neho modulo veľký spoločný násobok všetkých „malých“ prvočísel. Alternatívne sa pozrite na nasledujúcu úlohu a využite, že $f(n)^{1/\deg f}$ je zhruba n .
14. Ak by sa v rozkladoch vyskytovali len prvočísla $p_1, \dots, p_r$, odhadnite rad geometrickými radmi.
15. Čo sa deje, keď n/a_n rastie?
16. Suma prevrátených hodnôt čísel neobsahujúcich jednu zvolenú číslicu.
17. Zápis v sústave so základom 10^{2022} .
18. $\sum \frac{1}{n}$.
19. Ak je $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nerastúca postupnosť nezáporných reálnych čísel, tak $\sum a_n$ konverguje práve vtedy, keď konverguje $\sum 2^n a_{2^n}$.
20. ?
21. Z union boundu vyjde niečo ako $k \sum_p \frac{1}{p^2}$. Preriedením dostatočne veľa prvočísel zariad'te, aby to bolo < 1 .

22. Koľko koreňov mod p^2 môže mať $x^2 + 1$? Potom už aplikujte štandardný postup a ono to vyjde.
23. b) je ľahšie, postupnosť by potom musela byť ohraničená. V a) nechajte nedeliteľnosti byť dosvedčené nejakými prvočíselnými mocninami – zistíte, že ich nie je dosť.
24. Chcete nachádzať situáciu, kedy (1) x aj $x + 2020$ sú bezštvorcové a (2) $x + 1, \dots, x + 2019$ nie sú bezštvorcové. (1) pripomína niečo, čo sme už videli, (2) zariad'te preriedením.
25. Nahliadnite, že $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{m}$ má najvyšš $2^{\omega(m)}$ riešení. Ale ω je divná funkcia, odhadnite ju vhodným logaritmom, aby vznikol konvergentný rad.
26. Rozmyslite si, koľko čísel zakazuje jedno prvočíslo; mal by z toho vziš't rad zovšeobecňujúci predchádzajúcu úlohu. Pozor na malé n .
27. Ak sa budeme pozerat' len na prvočíselné n , tak sa nesúdeliteľnosť zjednoduší na nedeliteľnosť. Potom stačí odhad $\lfloor x \rfloor = x + O(1)$.
28. Ak $a^n + b^n = c_n^{n+1}$, k čomu konverguje c_n ?
29. Pozrite sa na postupnosť $\frac{a_1 + \dots + a_{n-1}}{a_n}$.
30. Nech $f(n) = x_n^2$, nahliadnite že $x_{n+1} - x_n$ konverguje.
31. Nech $x_n^2 = a2^n + b$, potom sa pozrite na $2x_n - x_{n+2}$.
32. Nech $f\left(\frac{10^n-1}{9}\right) = \frac{10^{x_n}-1}{9}$, potom sa pozrite na $x_n - n \deg f$.
33. Nech $x_n = y_n^2$. Pomocou postupnosti $y_n - y_{n+1}$ získate, že $b - 1$ je štvorec, a potom už viete všetko doriešiť pomocou medzier medzi štvorcami.
34. Nech $f(x_n) = 2^n$, potom sa pozrite na $x_{n+\deg f} - 2x_n$. Akonáhle narazíte na konštantu, môžete vyvodit' rovnosť polynómov a nájsť príliš veľa koreňov.
35. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi(n)}{n} = 0$.
36. $\sum \frac{1}{[p_n \nu]} \geq \frac{1}{\nu} \sum \frac{1}{p_n}$.